1.3.21 Využití společných násobků a dělitelů I

Předpoklady: 010320

Př. 1: Projdi si všechny tři hodiny, ve kterých jsme dláždili, a sepiš výsledky, ke kterým jsme dospěli.

- Délka strany dlážděného čtverce musí být násobkem délky strany čtvercové dlaždice.
- Na dláždění obdélníku můžeme používat pouze čtvercové dlaždice, jejichž rozměr je dělitelem obou stran obdélníku $\Rightarrow$ hledáme tedy (největší) společný dělitel.
- Při dláždění obdélníkovými dlaždicemi můžeme vydláždit pouze čtverce, jejichž strany jsou (nejmenším) násobkem obou stran dlaždice.
- Při dláždění obdélníku obdélníkovou dlaždicí musí být jeden rozměr obdélníku násobkem jednoho rozměru dlaždice a druhý rozměr obdélníku násobek druhého rozměru dlaždice.

Pedagogická poznámka: Během dláždění je postup třídy dost nesynchronizovaný, mnozí žáci se usilovně ženou kupředu a nezapisují zrovna přehledně. Sestavení přehledu je jednou z možností, jak zdůraznit důležitost přehledného zápisu.

Př. 2: Rohlík stojí 2,90 Kč. Pokud se celá hodnota nákupu nedá vyjádřit v celých korunách, dojde k zaokrouhlování. Ceny končí na 50, 60, ..., 90 haléřů se zaokrouhlují nahoru (vydělá obchod), ceny končící na 10, 20, 30, 40 se zaokrouhlují dolů (vydělá zákazník). Kolik rohlíků musíme koupit, abychom platili bez zaokrouhlování. Kolik rohlíků si musíme koupit, abychom díky zaokrouhlování ušetřili nejvíce?

Cena rohlíku 2,90 Kč, při jakémkoliv počtu nakoupených rohlíků nemají 2 Kč v ceně žádný vliv na hodnoty v haléřích $\Rightarrow$ sledujeme pouze částku 0,90 Kč.

počet rohlíků	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
cena z 90 Ha	0,90	1,80	2,70	3,60	4,50	5,40	6,30	7,20	8,10	9,00

Pokud chceme platit bez zaokrouhlování, musíme koupit 10, 20, 30, 40, 50, ... rohlíků (počet rohlíků musí být násobek deseti).
Největší hodnotou haléřů, která se zaokrouhluje dolů je 40 haléřů $\Rightarrow$ pokud chceme nejvíce ušetřit, musíme koupit 6 rohlíků (nebo 16, 26, 36, ...) rohlíků.

Pedagogická poznámka: Pokud někdo řeší příklad s celou cenou 2,90 Kč není to na závadu, pouze si tím komplikuje cestu k výsledku.

Př. 3: Vejce se prodávají v krabičkách po šesti. Je možné, že velkoobchodní balení těchto krabiček obsahuje 1524 vajec?

Počet vajec ve velkoobchodním balení by měl být dělitelný šesti $\Rightarrow$ zjišťujeme, zda je číslo 1524 dělitelné šesti:

- 1524 je dělitelné dvěma (končí na sudou číslici),
- 1524 je dělitelné třemi (ciferný součet $1+5+2+4=12$ je dělitelný třemi),

$\Rightarrow$ 1524 je dělitelné šesti a může tedy představovat počet vajec ve velkoobchodním balení.

Př. 4: Při hromadném vystoupení budou vystupující postupně cvičit ve dvojicích, trojicích a čtveřicích. Jaký nejmenší počet vystupujících může nacvičovat skladbu?
Na konci skladby pak vytvoří skupiny po devíti a po dvaceti 20. Jaký nejmenší počet cvičenců je třeba k nácviku závěru skladby?

Vystoupení probíhá ve:

- dvojicích $\Rightarrow$ počet cvičících musí být násobek dvou,
- trojicích $\Rightarrow$ počet cvičících musí být násobek tří,
- čtveřicích $\Rightarrow$ počet cvičících musí být násobek čtyř.

$n(2,3,4) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \Rightarrow$ skladbu musí nacvičovat minimálně 12 cvičenců.

Konec skladby vyžaduje skupiny po:

- devíti $\Rightarrow$ počet cvičících musí být násobek devíti,
- dvaceti $\Rightarrow$ počet cvičících musí být násobek dvaceti.

$9 = 3 \cdot 3$, $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$n(2,3,4,9,20) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

Závěr skladby musí nacvičovat minimálně 180 cvičících.

Pedagogická poznámka: Žáci dospěji k výsledku různě. Někteří hledají početně nejmenší společný násobek, jiní používají tabulku nebo zkoušení násobky dvou.
Pokud vůbec neví, radím jim, aby zkusili najít řešení první části příkladu metodou pokus-omyl a během hledání sledovali, proč která čísla nevyhovují.

Př. 5: Ošklivé káčátko mělo ve škole vážně smůlu. Při všech hrách, kdy se káčátka dělila po třech, čtyřech nebo pěti, zůstalo jako jediné samotné. Kolik káčátek do třídy chodilo?

Počet normálních káčátek je dělitelný třemi, čtyřmi i pěti beze zbytku (ve třídě zůstalo samo jen ošklivé káčátko) $\Rightarrow$ hledáme společný násobek čísel 3, 4, 5.

$n(3,4,5) = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Do třídy chodilo 61 káčátek (60 normálních a jedno ošklivé, které vždy přebývalo).

Př. 6: Kryňák nutí nebohé žáčky opravovat písemky. Pětkaři musí opravit každou, čtyřkaři každou druhou, trojkaři každou třetí, dvojkaři každou čtvrtou a jedničkáři každou pátou napsanou písemku. Kryňák pak musí všechny opravy zkontrolovat. Po kolika týdnech se mu na stole sejdou opravy od všech žáků a Kryňák se zhroutí? Prima píše písemku pravidelně jednou týdně. Předpokládej, že ve třídě je alespoň jeden jedničkář, dvojkař, trojkař, čtyřkař i pětkař.

Číslo týdne, ve kterém se sejdou opravy od všech žáků primy, musí být násobkem 2, 3, 4 a 5.

$n(2,3,4,5) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Všechny opravy se sejdou po 60 týdnech (tolik jich v jednom roku však není, takže Kryňák možná přežije).

Př. 7: Petr má na talíři u kola 35 zubů, na zadním kole 25 zubů. O kolik celých otáček musí otočit šlapačkami, aby se zadní kolo otočilo také o libovolný počet celých otáček. O jakou vzdálenost kolo ujede, když obvod zadního kola měří 1,6 m.

Talíř je spojen se zadním kolem řetězem $\Rightarrow$ když otočíme talířem o 1 zub, otočí se zadní kolečko také o 1 zub $\Rightarrow$

- pokud se zadní kolo otočí o jednu otáčku (25 zubů), otočí se talíř také o 25 zubů (což na talíři není ani jedna celá otáčka),
- pokud se talíř otočí se jednu otáčku (35 zubů), zadní kolo se otočí také o 35 zubů (což je na zním kole více než jedna celá otáčka).

$\Rightarrow$ hledáme počet zubů, který můžeme rozdělit na skupiny po 25 (otočení zadního kola) i 35 (otočení talíře) $\Rightarrow$ hledáme $n(25,35)$: $25 = 5 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$

$n(25,35) = 5 \cdot 5 \cdot 7 = 175$

Řetěz se musí posunout o 175 zubů, talíř se musí otočit 5krát, zadní kolo 7krát.
Ujetá vzdálenost $7 \cdot 1{,}6 = 11{,}2$ m

Př. 8: Pro dělitelnost sedmi existuje několik bohužel však komplikovanějších pravidel. Pokus se uvedené postupy pochopit a na jejich základě ověř, že číslo 10059 je dělitelné sedmi.
"Číslo je dělitelné sedmi, je-li rozdíl součtu lichých a sudých trojic cifer dělitelný sedmi. Příklad: 1 023 029: $1 - 023 + 029 = 7$ $\Rightarrow$ je dělitelné 7."
"Číslo je dělitelné sedmi, je-li ciferný součet vypočtený tak, že se první až n-tá číslice od zadu postupně násobí čísly 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, ... Příklad: 1 204: $1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 14$ $\Rightarrow$ je dělitelné 7."
Pomocí pravidel pak rozhodni, zda jsou sedmi dělitelná čísla:
a) 161 b) 446 c) 719 d) 201050

Shrnutí: